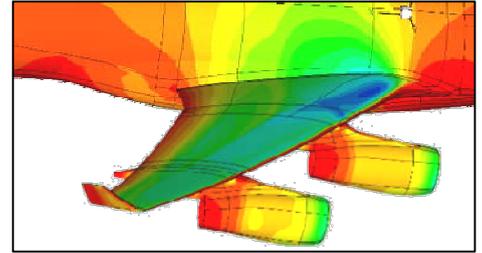


1 But de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides. Cela permet de :

- Déterminer les dimensions ou les déformations des pièces.
- Choisir le matériau constituant les pièces.



2 Les hypothèses de la RDM

La géométrie de la pièce :

Pour tous les calculs RDM, on utilise le modèle « Poutre » (solides dont une dimension est très supérieure aux deux autres).

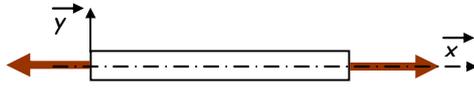
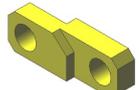
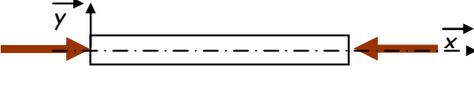
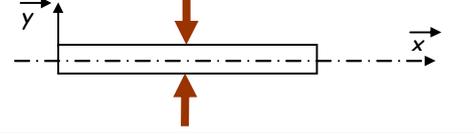
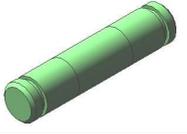
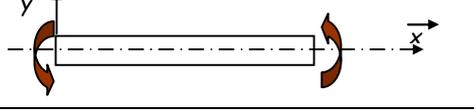
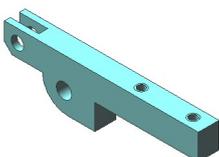
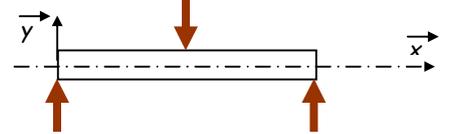
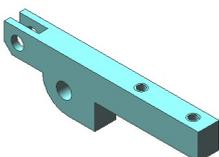
Les matériaux étudiés:

Ils doivent être :

- **Isotropes** : on admet que les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. Elle n'est pas vérifiée pour les matériaux tels que le bois, les matériaux composites...etc.
- **Homogènes** : On admet que les matériaux ont les mêmes caractéristiques (composition) en tout point.
- **Continus** : pas de fissure, pas de creux ...

3 Les différentes sollicitations simples

Une poutre peut être soumise à plusieurs sollicitations qui dépendent que le nature et de la direction des actions mécaniques.

Sollicitation	Torseur de cohésion	Schéma	Exemples
Traction	$\{T(coh)\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $N > 0$		Tirant Bielle Courroie 
Compression	$\{T(coh)\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $N < 0$		Ressort 
Cisaillement	$\{T(coh)\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix}$		Axe Clavette Goupille Rivet 
Torsion	$\{T(coh)\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Mt \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$		Arbre de transmission Tuyauterie 
Flexion	$\{T(coh)\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}$		Arbre Axe Plongeur Aile d'avion 

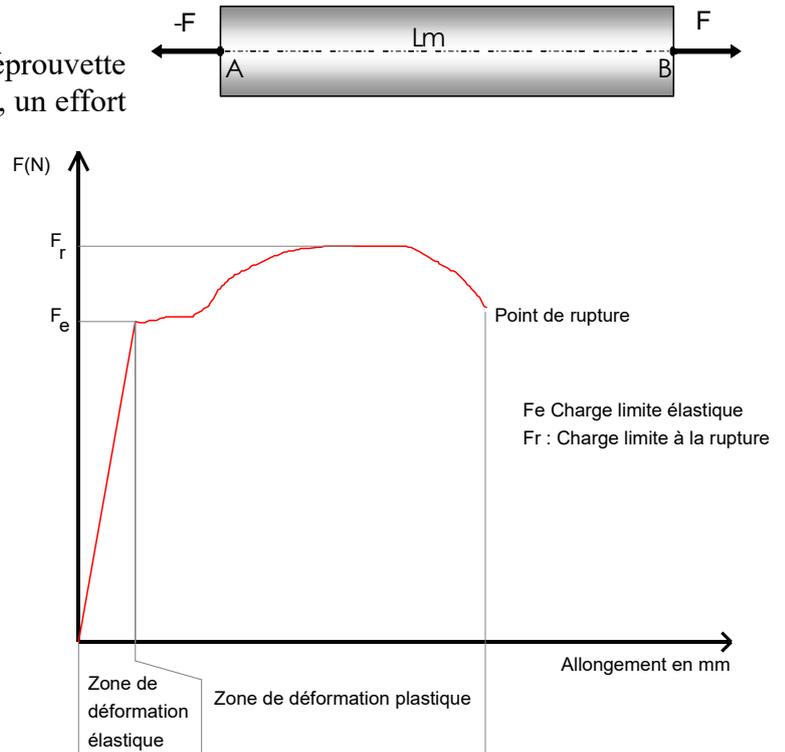
4 Traction

4.1 Essai de Traction:

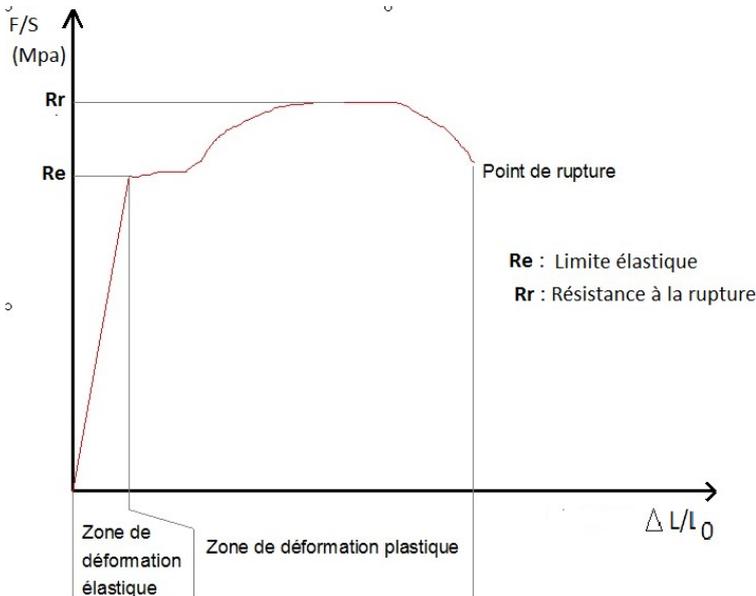
On applique progressivement et lentement à une éprouvette cylindrique, de formes et de dimensions normalisées, un effort de traction croissant dont l'intensité varie de 0 à F jusqu'à la rupture.



On obtient avec cet essai le graphe de l'allongement en fonction de la charge appliquée :

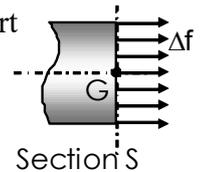


Comme la force dépend de la section de l'éprouvette (plus la section est importante, plus l'effort devra être important pour produire le même résultat), et l'allongement de sa longueur (idem). Les résultats qui caractérisent le matériau sont représentés par le graphe suivant :



4.2 Contrainte en traction:

Si on étudie la répartition de l'effort F dans une section de la poutre, nous obtenons une répartition uniforme :



On appelle contrainte cette répartition, elle est notée pour la traction σ (sigma), a pour valeur :

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ avec } \sigma \text{ en N/mm}^2(\text{MPa}), F \text{ en N, } S \text{ en mm}^2.$$

L'expérience montre qu'il y a proportionnalité dans la zone élastique entre la contrainte σ et l'allongement relatif

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Loi de Hooke : $\sigma = E\varepsilon$ donc $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0}$ avec E module de Young en daN/mm².

Exemple pour les aciers E peut varier de 17 000 à 28 000 daN/mm².

4.3 Condition de résistance :

Pendant toute la durée de son service, une pièce doit conserver un comportement élastique. Cette condition s'exprime par l'inégalité suivante : $\sigma_{max i} \leq R_e$

Les problèmes d'incertitude sur la valeur de R_e , de la contrainte, de la modélisation de l'étude..., nous amènent donc à exprimer la condition de résistance par :

$$\sigma_{max i} \leq \frac{R_e}{s} = R_{pe}$$

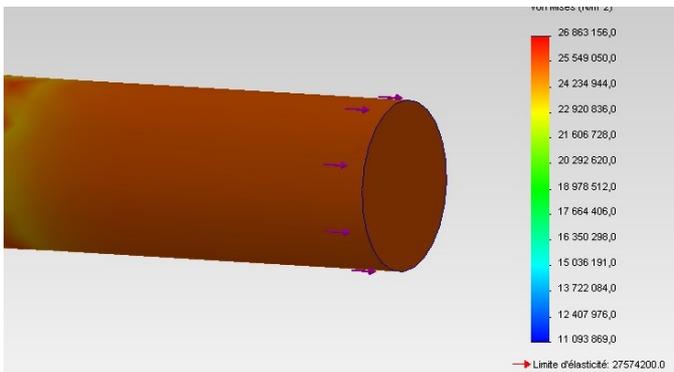
avec R_e : résistance limite élastique en MPa

s : Coefficient de sécurité ($s > 1$)

R_{pe} : Résistance ou contrainte pratique de limite élastique en MPa

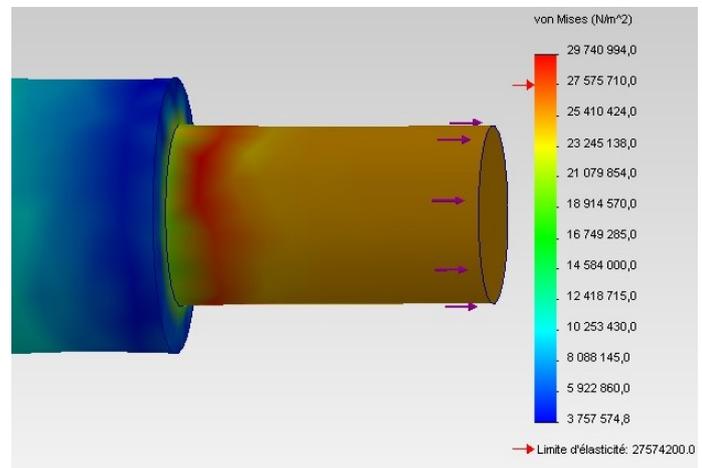
4.4 Coefficient de concentration de contraintes : K_t

La plupart des pièces industrielles ne sont pas cylindriques, elles possèdent des singularités de formes (perçages, gorges, rainures, filetages...). Ces singularités provoquent une augmentation de contrainte.

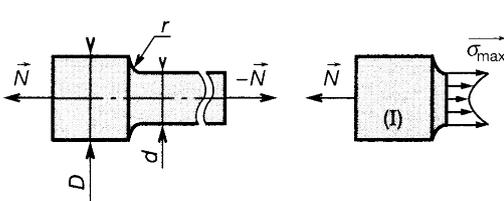


Dans ce cas d'un arbre de diamètre constant, la contrainte maximale est de 26,86 MPa, inférieure à R_e de 27.57 MPa.

Si on augmente le diamètre brutalement, le résultat est une augmentation des contraintes au-delà de la valeur admissible et donc une rupture de la pièce !

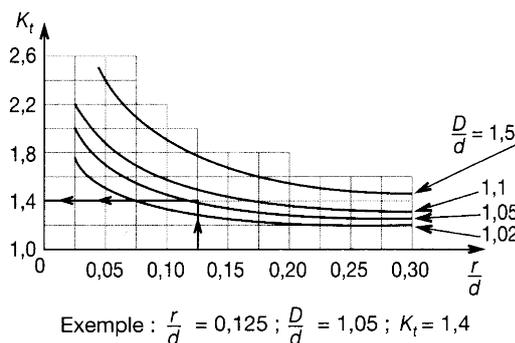


On définit un coefficient de concentration de contrainte appelé K_t en fonction des formes :



$$|\sigma_{max}| = K_t |\sigma_{nom}|$$

$$|\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$



La contrainte maximale devient

$$\sigma_{max i} = K_t \cdot \sigma_{nom}$$

4.5 Formulaire de traction-compression.

La contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$ en MPa avec F en N et S en mm².

Si S est une section circulaire : $S = \pi \cdot R^2$

Si S est une section annulaire : $S = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Si S est une section rectangulaire de cotés a et b : $S = a \cdot b$

Coefficient de sécurité s : $s = \frac{\sigma_{\max}}{Re}$

Condition de résistance : $\sigma \leq \frac{Re}{s}$ avec s Coefficient de sécurité.

\Rightarrow en fonction de l'énoncé : $\frac{F}{S} \leq \frac{Re}{s} \Rightarrow F \leq \frac{Re \cdot S}{s}$ ou $S \geq \frac{F \cdot s}{Re} \Rightarrow$ si S est circulaire de rayon R, $R = \sqrt{\frac{F \cdot s}{Re \cdot \pi}}$

Si phénomène de concentration de contrainte : $\sigma_{\max i} = K_t \cdot \sigma_{nom}$

Recherche de l'allongement :

$\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \sigma \frac{L}{E} = \frac{F \cdot L}{S \cdot E}$ unité de ΔL en fonction de l'unité de L

4.6 Formulaire de flexion.

Condition de résistance : $\sigma \leq \frac{Re}{s}$ avec s Coefficient de sécurité, la même que la traction.

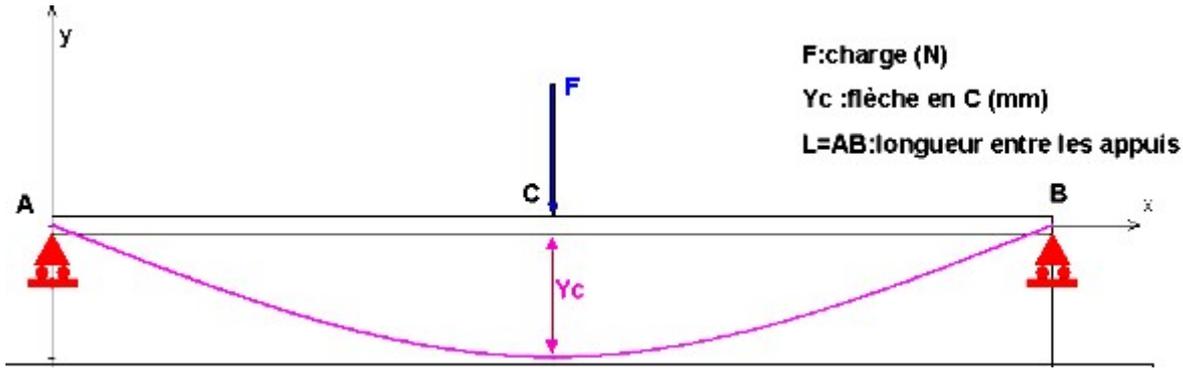
$\sigma = \frac{Mf}{I_{gz}} \cdot y$ Attention Mf en N.mm et I_{gz} en mm⁴ et y en mm !

Déformé : $y_{Cl} = \frac{5FL^3}{48E \cdot I_{gz}}$ Attention L en mm ! I_{gz} en mm⁴, F en N et E en MPa.

**Bien vérifier les unités données dans les énoncés,
souvent elles ne correspondent pas aux unités dans les formules**

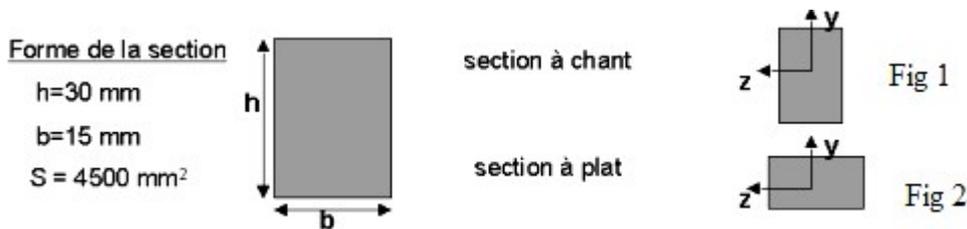
5 Flexion

5.1 Essai de flexion :



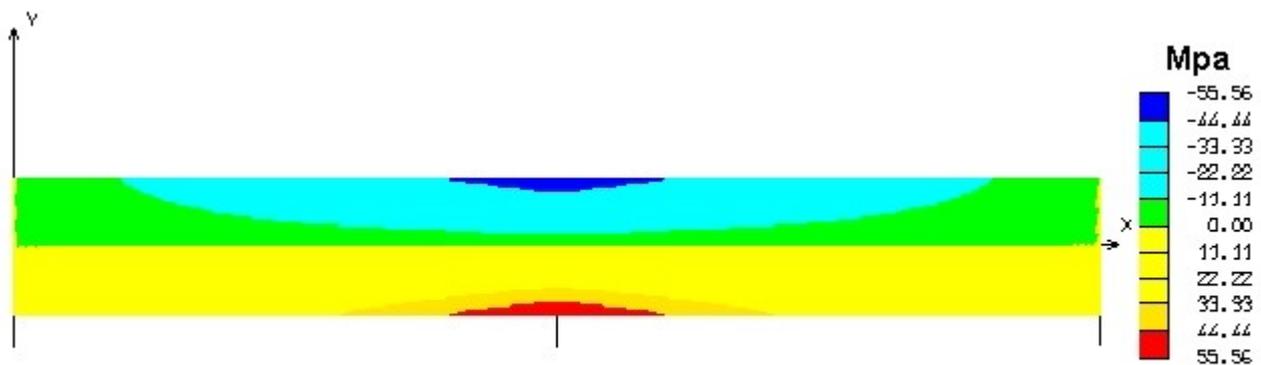
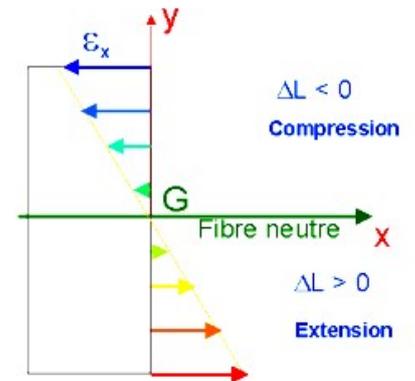
5.2 Résultats :

1. La flèche Y_c est proportionnelle à la charge F , à la longueur entre appuis L et au module d'élasticité E .
2. Contrairement à la traction la forme a une incidence sur la flexion :



Pour une même section de 4500mm^2 , une même longueur et une même charge, la déformation de la poutre fig2 est quatre fois plus importante que dans le cas Fig 1.

3. Dans la moitié supérieure de la poutre, les fibres sont comprimées, dans la moitié inférieure, elles sont tendues :

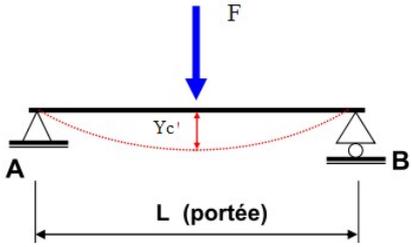
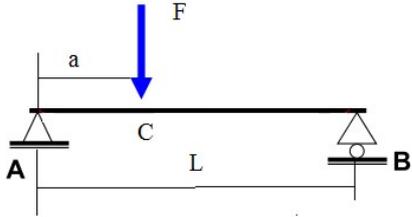
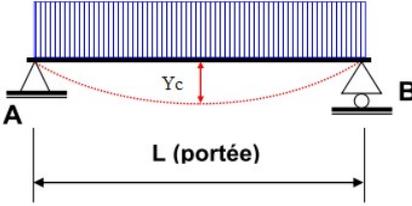
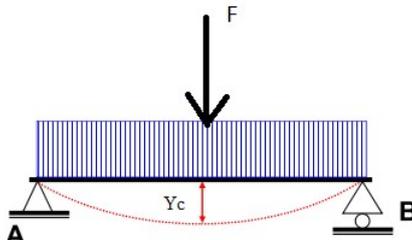
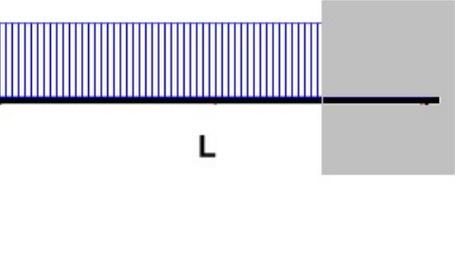


5.3 Condition de résistance :

$\sigma_{\max} \leq \frac{R_e}{\gamma} = R_{pe}$	$\sigma = \frac{Mf}{I_{gz}} \cdot y$
<p>R_e la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa)</p> <p>s un coefficient de sécurité</p> <p>y : ordonnée du barycentre de la section en mm :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $y = \frac{D}{2}$ pour une section circulaire • $y = \frac{h}{2}$ Pour une section rectangulaire 	<p>I_{gz} : moment quadratique de la section en mm^4</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pour une section circulaire $I_{gz} = \frac{\pi D^4}{64}$ et $y = \frac{D}{2}$ • Pour une section rectangulaire $I_{gz} = \frac{bh^3}{12}$ et $y = \frac{h}{2}$

5.4 Déformée : (Y_c) :

La flèche maximale Y_c dépend de la sollicitation et des appuis :

<p>Poutre sur 2 appuis. Charge au milieu. $Y_{c1} = \frac{5FL^3}{48E.I_{gz}}$</p>	<p>Poutre sur 2 appuis : $Y_c = \frac{5F.a(3L-4a^2)^3}{48E.I_{gz}}$</p>
	
<p>Poutre sur 2 appuis. Charge répartie. $Y_{c2} = \frac{5pL^4}{384E.I_{gz}}$</p> <p>$p$! = charge répartie en N/m !</p>	<p>Poutre encastrée. $Y_c = \frac{5FL^3}{3E.I_{gz}}$</p>
	
<p>Poutre sur 2 appuis. Charge au milieu et répartie. $Y_c = Y_{c1} + Y_{c2}$</p>	<p>Poutre encastré. Charge répartie. $Y_c = \frac{5pL^4}{6E.I_{gz}}$</p>
	

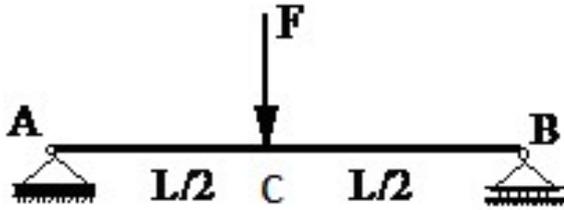
5.5 Effort tranchant et moment fléchissant.

Comme les contraintes varient tout au long de la poutre. Les contraintes seront maximales là où les actions mécaniques seront les plus importantes.

Effort tranchant : L'effort tranchant $T(y)$ en un point G d'abscisse x de la ligne moyenne d'une poutre est la résultante des efforts verticaux exercés à gauche de G .

Moment fléchissant : Le moment fléchissant Mfz en un point G d'abscisse x de la ligne moyenne d'une poutre est la somme des moments extérieurs s'exerçant à gauche de G .

• Exemple 1 :



$$F=500 \text{ daN } AB=3\text{m}$$

$$\text{Il est évident que } Y_A = Y_B = F / 2 = 250\text{daN} .$$

Pour x situé entre A et C :

$$\text{Efforts tranchants : } T_y = Y_a = 250\text{daN}$$

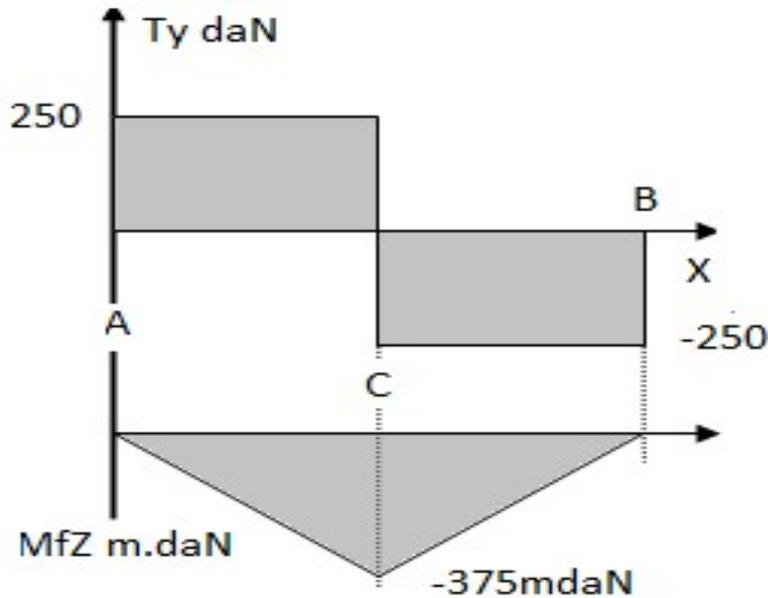
$$\text{Moments fléchissants : } Mfz = -x.Y_a = -250.x \text{ m.daN, donc en C, } Mfz = -250.1,5 = -375\text{m.daN}$$

Pour x situé entre C et B :

$$\text{Efforts tranchants : } T_y = Y_a - F = -250\text{daN}$$

$$\text{Moments fléchissants : } Mfz = -x.Y_a + (x-1,5).F = -250.x + 500.x - 1,5.500 = 250.x - 750 \text{ m.daN.}$$

Diagramme :

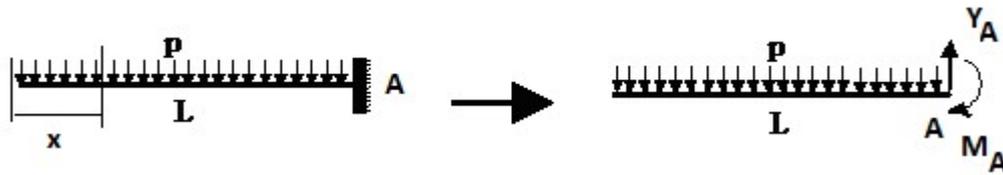


Le point C est l'endroit où la contrainte est maximale.

$$\sigma = \frac{Mf}{I_{gz}} . y$$

Exemple 2 :

Poutre encastrée avec charge répartie



$$L=2\text{m. } p = 80 \text{ daN/m}$$

A gauche il n'y a pas de charge, sauf la charge répartie :

$$T_y = px = -800 \cdot x \text{ N. En A } T_y = -800 \cdot 2 = -1600 \text{ N}$$

Le tronçon x de charge répartie exerce une charge (px) dont la résultante se situe au milieu, donc à $1/2x$ de la section considérée.

$$M_fz = (px) \cdot (x/2) = (1/2) \cdot px^2 \text{ .En A } M_fz = 1/2 \cdot 800 \cdot 2^2 = 1600 \text{ m.N}$$

